



**Prodotto realizzato con il contributo della Regione
Toscana nell'ambito dell'azione regionale di
sistema**

**Laboratori del
Sapere Scientifico**

Derivata e derivatore: Un'analisi grafica

La trasversalità dei saperi
Matematica e elettronica

Classe V
Istituto Tecnico Industriale/Tecnologico

Leonardo Barsantini - docente di elettronica
Lucia Pinzauti - docente di matematica

Il percorso didattico è stato proposto, una prima volta, a una classe V ITI, indirizzo elettronica e telecomunicazioni (attualmente indirizzo tecnico tecnologico) e riprende una precedente attività, svolta nella classe terza, sulle funzioni definite a tratti. In terza gli studenti avevano studiato funzioni particolarmente significative per l'elettronica: onda quadra, a dente di sega e triangolare, tracciandone il grafico e scrivendone delle nuove in funzione dei parametri forniti loro: ampiezza, periodo, *duty cycle*.

Nella quinta si sono riprese queste funzioni, utilizzando i nuovi strumenti matematici della derivata (e dell'integrale, qui non descritto), acquisiti nel frattempo dagli studenti.

La necessità di attuare collegamenti significativi fra discipline affini ha portato, da alcuni anni, a sviluppare un'attività di ricerca per la didattica della matematica e della tecnologia presso l'Istituto Tecnico Tecnologico Balducci di Pontassieve (FI). Il percorso che presentiamo vuole costruire un contesto di riferimento nel quale gli studenti possano applicare le proprie conoscenze per sviluppare competenze metodologiche e operative. È stato attuato in una classe quinta dell'indirizzo elettronica e telecomunicazioni nell'anno scolastico 2011-12 - negli anni successivi nelle classi quarte - e si prefigge l'obiettivo specifico di rinforzare i concetti di derivata e di segnale.

Sottolineando che l'apprendimento della matematica rappresenta sempre un grosso scoglio per gli studenti del tecnico, proprio per la necessità di ridefinire e rinforzare i concetti appresi, il lavoro recupera un'attività svolta nella classe terza sulle funzioni definite a tratti.

Nell'ottica del curriculum verticale, abbiamo ripreso le funzioni studiate a suo tempo e abbiamo chiesto agli studenti di calcolare le derivate, già introdotte a matematica, e di tracciare i relativi grafici. Parallelamente, durante il corso di elettronica, abbiamo realizzato in laboratorio i circuiti che forniscono in uscita la derivata del segnale in ingresso. Gli studenti, assistiti dai due docenti in compresenza, hanno messo a confronto i risultati “ideali”, con quelli “reali” ottenuti con i circuiti elettronici. Per un'effettiva laboratorialità, tutte le fasi di lavoro sono state svolte operativamente dagli studenti, utilizzando anche schede preparate dai docenti, in classe, in laboratorio e a casa.

Il percorso è stato sviluppato in aula e nel laboratorio di elettronica. In aula sono state utilizzate delle schede di lavoro con indicazione del lavoro da svolgere e uno spazio per tracciare i grafici richiesti. E' stata richiesta anche un'elaborazione a casa di alcune attività proposte in classe.

Nella pagina successiva riportiamo un esempio della prima scheda utilizzata (la quadrettatura è parte dello spazio per tracciare i grafici).

Scheda 1 Nome _____

Data _____

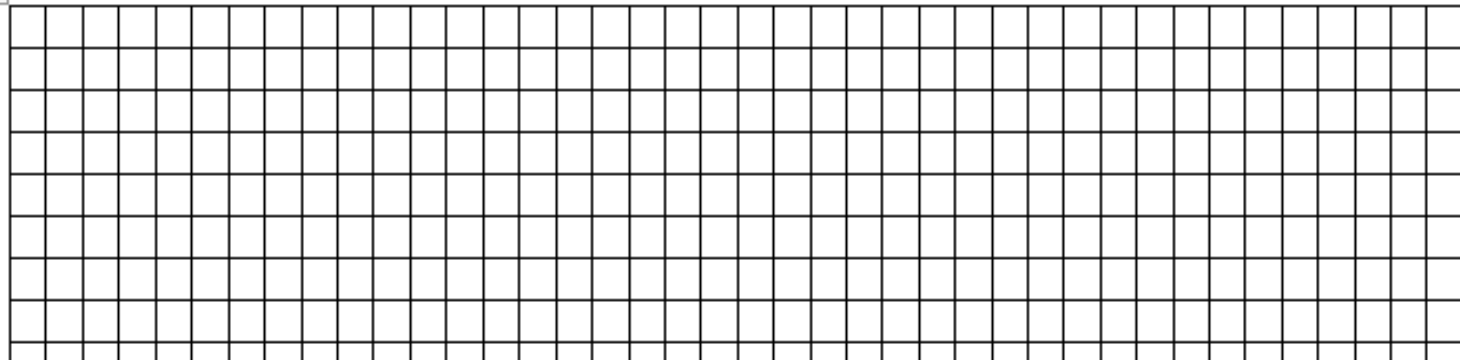
Data la funzione (onda quadra):

$$s(t) = \begin{cases} 8 \text{ V} & \text{per } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \\ -5 \text{ V} & \text{per } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \end{cases} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

a) calcola la derivata;

b) traccia il grafico della funzione $s(t)$ e della sua derivata, con $T = 6\text{ms}$;

c) indica gli eventuali punti in cui $s(t)$ non è continua e quelli in cui non è derivabile.



Nel laboratorio di elettronica si utilizzano generatori di funzione, alimentatori, oscilloscopi, nonché i componenti necessari per realizzare i dispositivi con amplificatori operazionali.

Mentre in classe ogni studente lavora singolarmente sulla propria scheda, in laboratorio gli studenti operano in gruppo.

La messa a punto del percorso ha richiesto una preparazione di alcuni mesi e una collaborazione costante nel determinare:

- i temi,
- le metodologie e le fasi di lavoro,
- le schede,
- le attività di laboratorio,
- I tempi per la realizzazione.

Quando possibile le attività sono state svolte in compresenza, ma non sempre ciò è possibile, visto i vincoli dell'orario scolastico. Per lo sviluppo del percorso qui descritto si sono utilizzate sei ore di compresenza in classe durante le ore di matematica. Non è stato invece possibile attuare la compresenza in laboratorio. Comunque, si è sempre discusso in classe dei risultati ottenuti in laboratorio. Altrettante, se non di più sono state le ore svolte in laboratorio dal singolo docente. Il percorso è stato sviluppato nell'arco di un paio di mesi per dare modo agli studenti di assimilare i concetti fondamentali proposti e trasformarli in competenze.

Il percorso didattico

Il lavoro, fortemente operativo, anche se essenzialmente basato sulla capacità di astrazione degli studenti, si è svolto in due fasi successive.

Fase uno

Gli studenti applicano le loro conoscenze teoriche per tracciare la derivata delle funzioni proposte. Per ogni funzione gli studenti, singolarmente, devono calcolare la derivata; tracciare il grafico della funzione $s(t)$ e della sua derivata; indicare gli eventuali punti in cui $s(t)$ non è continua e quelli in cui non è derivabile. Le schede sono lo strumento di lavoro operativo.

Fase due

Le stesse funzioni sono ora analizzate con il derivatore, un circuito elettronico realizzato in laboratorio. Gli studenti montano il circuito, generano i segnali, visualizzano sull'oscilloscopio il segnale d'ingresso e di uscita dal derivatore (generare i segnali corretti e leggerli l'oscilloscopio sono operazioni complesse per molti studenti); confrontano i segnali di uscita dal derivatore con le derivate della fase 1. Qui si è richiesto agli studenti una riflessione personale che ha permesso di evidenziare come la derivata ottenuta dal derivatore, sul segnale reale, avesse caratteristiche diverse da quella "ideale".

Fase due – continua

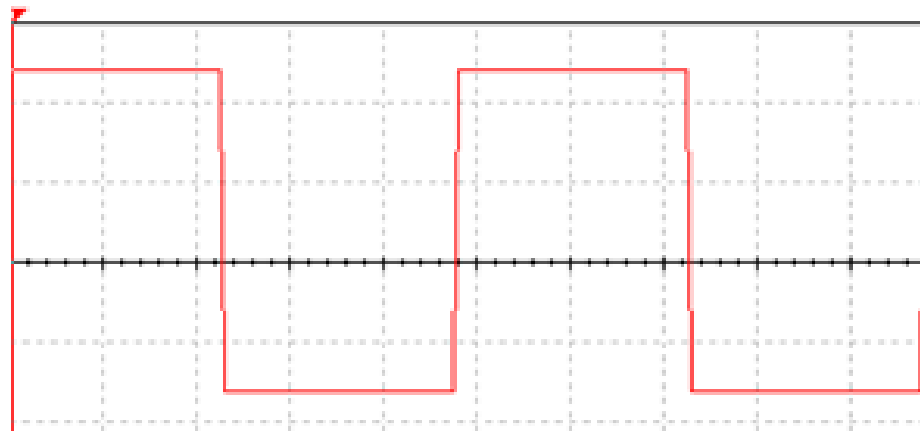
Questa fase del lavoro si è dimostrata essenziale poiché ha permesso agli studenti di comprendere più a fondo come opera la derivata su una funzione. Ad esempio, nel caso dell'onda quadra, si nota che la derivata ottenuta dal derivatore presenta degli impulsi, verso l'alto e verso il basso, che la derivata “matematica” non presenta. Infatti, la derivata di un'onda quadra è zero ovunque è definita. Qui sono presenti gli impulsi poiché i fronti di salita e di discesa dell'onda hanno pendenza molto elevata ma inferiore a 90° . L'onda reale è dunque un trapezio più che un quadrato. Inoltre, si sono aggiunte altre considerazioni inerenti l'elettronica che saranno discusse in seguito.

Il percorso in dettaglio

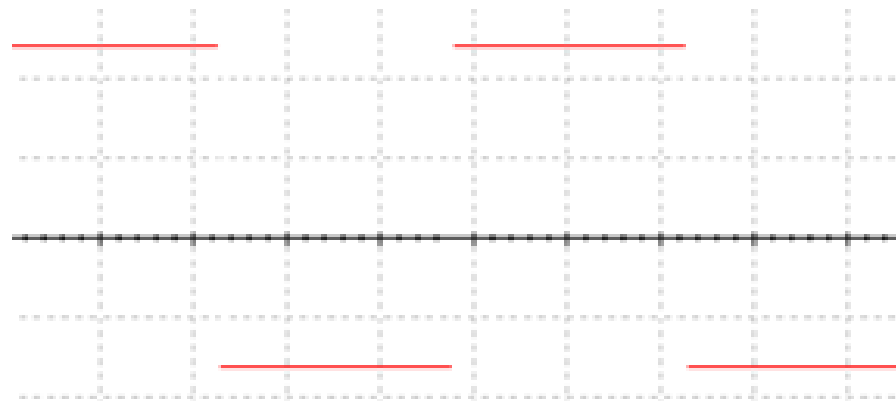
Le onde

Riportiamo i grafici delle onde sulle quali abbiamo lavorato. Come si noterà nelle diapositive che seguono ci sono due “versioni” della stessa onda

Onda quadra

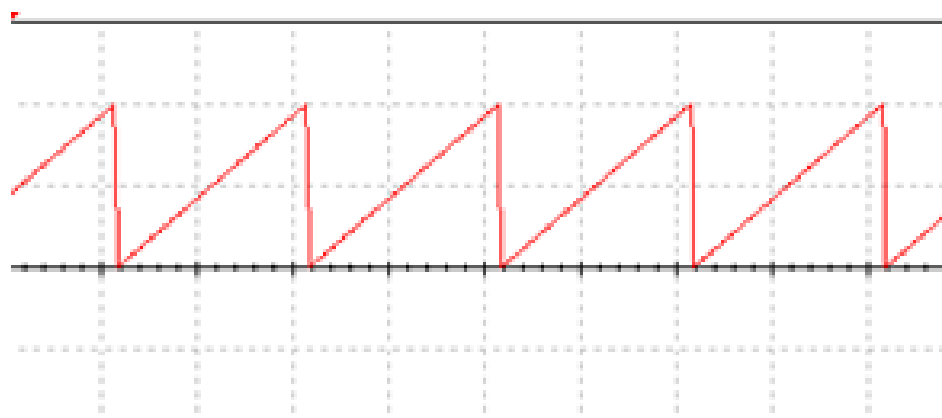


Nella versione “elettronica”

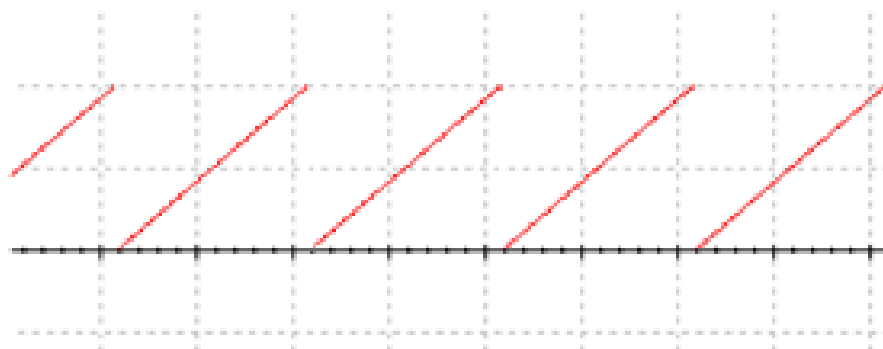


Nella versione “matematica”

Onda a dente di sega

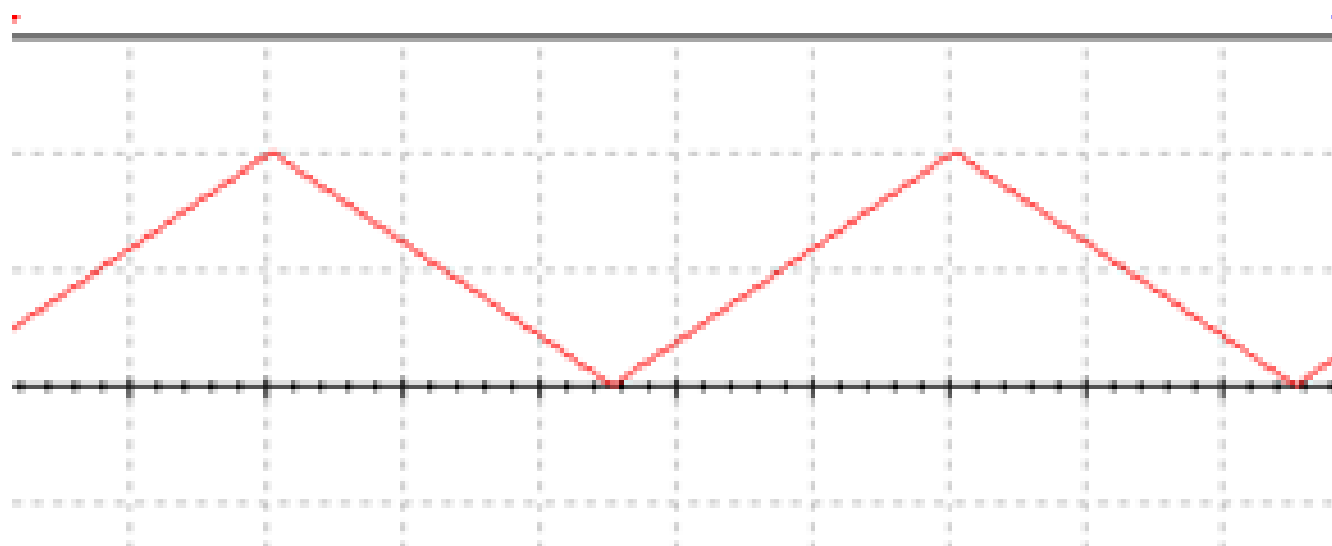


Nella versione “elettronica”



Nella versione “matematica”

Onda triangolare



Nelle precedenti diapositive si nota che ci sono due differenti rappresentazione dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega: quella, diciamo così, elettronica e quella matematica.

Qui si confrontano due diverse rappresentazioni di un'onda, con caratteristiche diverse, ma alle quali viene dato lo stesso nome: quella reale e quella ideale.

Gli studenti

Questa diversa rappresentazione dell'onda ideale, e del segnale reale ad essa associato, hanno creato non pochi problemi agli studenti che in una prima fase del lavoro non hanno compreso la differenza. Per loro si trattava, principalmente, di soddisfare le richieste dei docenti, per cui non era infrequente sentirsi chiedere, nel disegnare, ad esempio, un'onda quadra ideale e non il segnale associato: “*Ma la devo disegnare come la vuole lei o come la vuole la prof. di matematica*”, e viceversa.

Fase 1 – La derivata

Gli studenti, applicando le loro conoscenze teoriche, devono: calcolare la derivata di ciascuna funzione; tracciare il grafico della funzione e della sua derivata; indicare gli eventuali punti in cui $s(t)$ non è continua e quelli in cui non è derivabile.

Negli esempi seguenti gli studenti hanno fissato il periodo $T = 6 \text{ ms}$ per la scala nei grafici.

Scheda 1 – Onda quadra

$$s(t) = \begin{cases} 8 \text{ V} & \text{per } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \\ -5 \text{ V} & \text{per } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \end{cases} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

La derivata è zero in ogni punto in cui la funzione è continua.

Scheda 2 - Onda a dente di sega

$$s(t) = 2(t - nT) \text{ per } nT \leq t < T + nT$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Il coefficiente angolare è espresso in V/ms.

La derivata è due in ogni punto in cui la funzione è continua.

Scheda 3 - Onda triangolare

$$s(t) = \begin{cases} 2t - 2nT & \text{per } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \\ -2t + 2(n+1)T & \text{per } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \end{cases}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Il coefficiente angolare è espresso in V/ms.

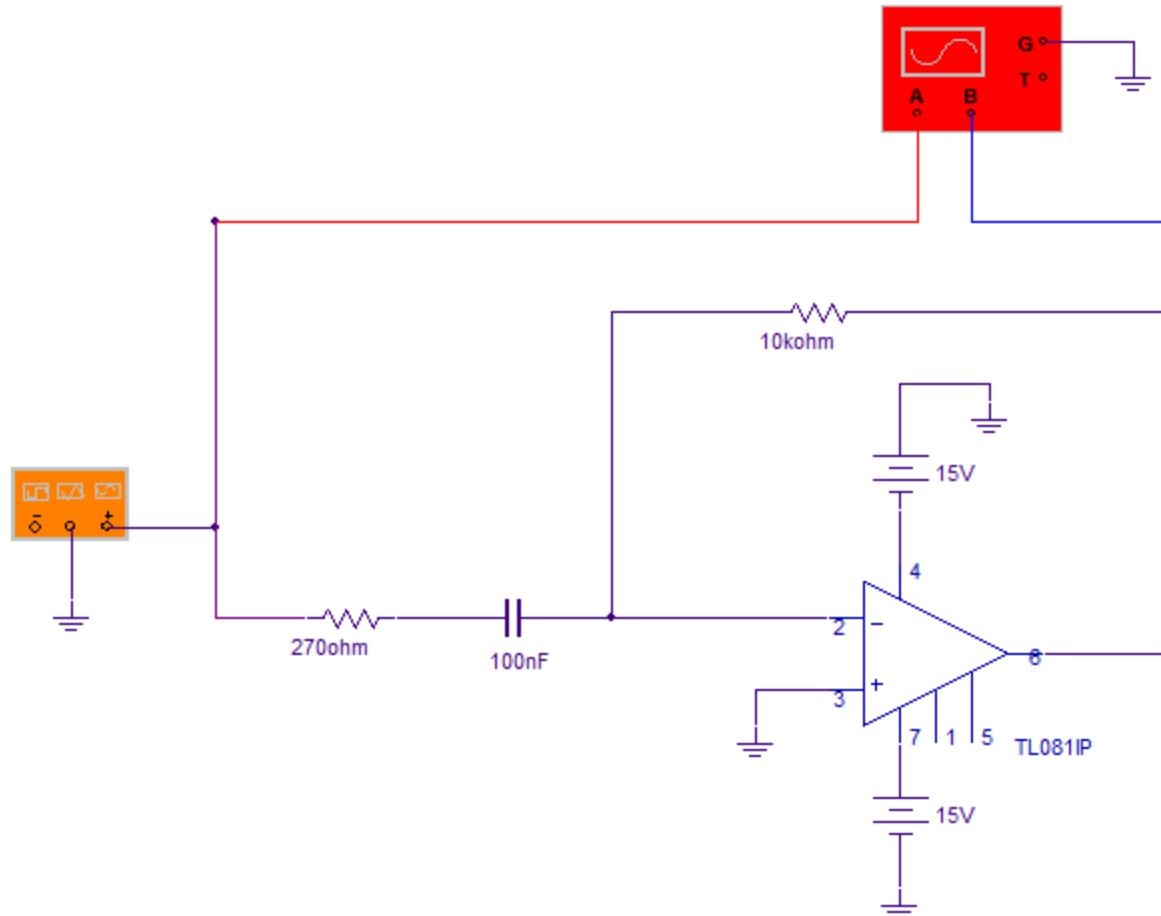
La derivata è:

$$s'(t) = \begin{cases} 2 & \text{per } nT < t < \frac{T}{2} + nT \\ -2 & \text{per } \frac{T}{2} + nT < t < T + nT \end{cases}$$

Fase 2 – Il derivatore

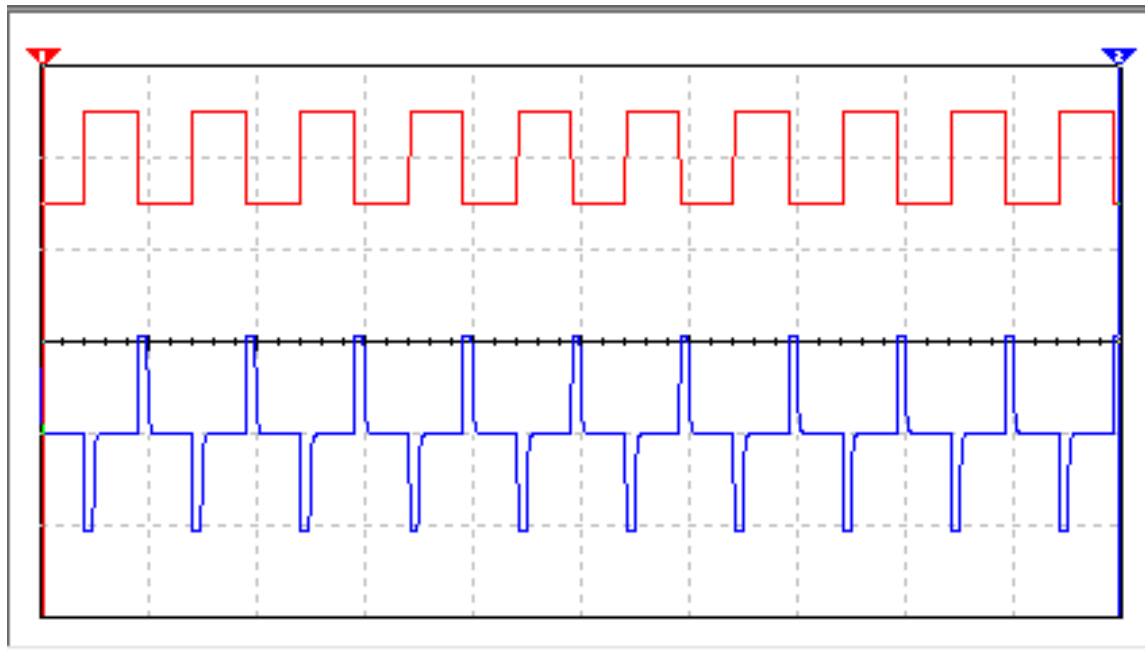
Le stesse funzioni sono ora analizzate con il derivatore, un circuito elettronico realizzato in laboratorio. Gli studenti devono montare il circuito con un amplificatore operazionale, generare i segnali con $T=6\text{ms}$, visualizzare sull'oscilloscopio il segnale di ingresso e di uscita dal derivatore reale a operazionale; confrontare i segnali di uscita dal derivatore con le derivate ottenute nella fase 1.

Schema del circuito derivatore



In arancione il generatore di funzione, in rosso l'oscilloscopio.

Nella simulazione che segue sono rappresentati il segnale a onda quadra, fornita in ingresso al circuito precedente (in rosso) e, in uscita al circuito, la sua derivata (in blu).



Gli studenti

Nella discussione collettiva si è subito osservato che la derivata ottenuta dal derivatore presenta degli impulsi, verso l'alto e verso il basso, che la derivata “matematica”, che è uguale a zero ovunque è definita, non presenta. Non è così semplice ottenere dagli studenti una possibile ipotesi del perché accade ciò. Gli impulsi sono presenti poiché l'onda reale è un “trapezio” più che un “quadrato” o un “rettangolo”: i fronti di salita e di discesa dell'onda hanno pendenza molto elevata, ma non sono verticali.

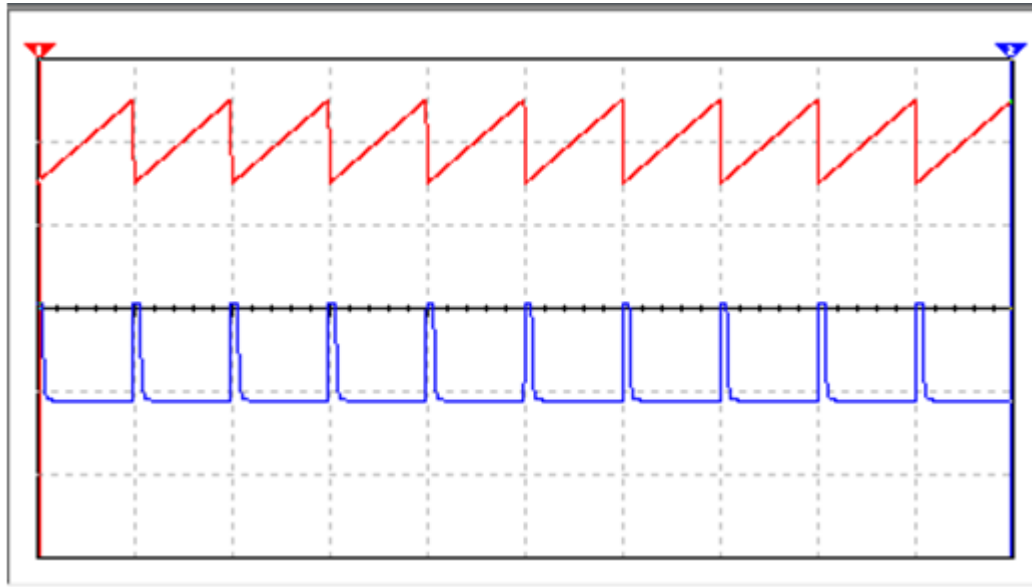
Gli studenti tendono a vedere la derivata come una “regola” da applicare per ottenere “qualcosa”. Nel lavoro che abbiamo svolto, al contrario, è necessario ragionare sulla forma del segnale, per poter fare delle ipotesi e ottenere dei risultati. Gli studenti sanno che la derivata di una costante è zero, ma non riconoscono nel livello alto e nel livello basso del segnale a onda quadra due intervalli a valore costante. D'altra parte, nella loro ottica, un'onda è l'opposto di una “costante”. La scheda 1 sulle onde, qui ripresa, ha fornito un valido contributo alla costruzione di prime ipotesi.

L'analisi dei fronti di salita e di discesa dell'onda quadra, è risultata ancora più complessa, perché qui è necessario immaginare questi due fronti come due rette, di pendenza molto elevata, positiva e negativa, e il risultato della loro derivata come i rispettivi coefficienti angolari. Abbiamo dovuto fare esempi concreti di rette con coefficienti angolari sempre maggiori per dare “concretezza” agli impulsi osservati.

Ma c'è un ulteriore problema. Il circuito derivatore, effettua la derivata, ma essendo un circuito “invertente”, scambia i valori positivi con quelli negativi e viceversa. Infatti, se si osserva l'ultima figura, si nota che l'impulso positivo è in corrispondenza del fronte di discesa, mentre quello negativo è in corrispondenza di quello di salita: esattamente l'opposto di quello che ci si aspetterebbe. Quindi, anche in questo caso è stato necessario avviare una specifica discussione su questo punto.

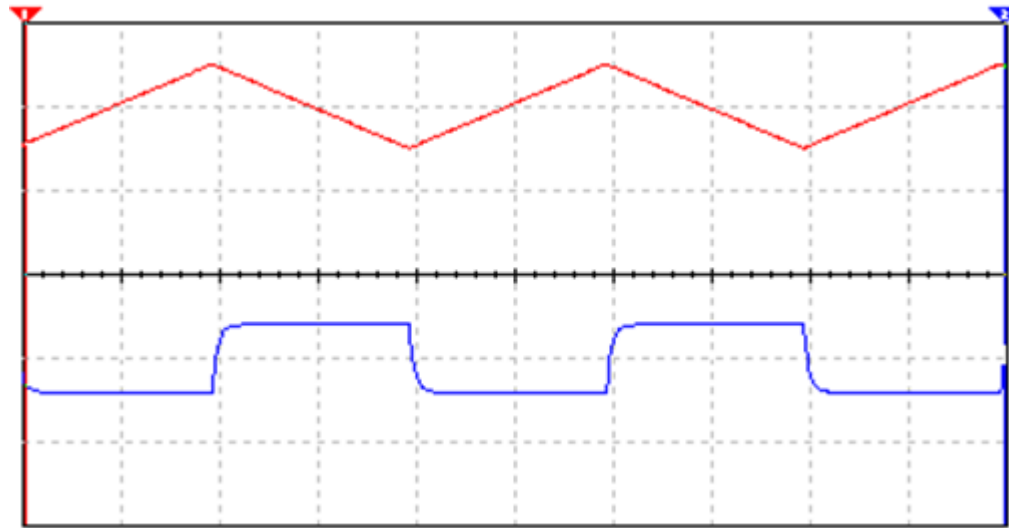
La discussione con gli studenti sui segnali le loro ipotesi, il confronto onda – segnale, la “visualizzazione” dei fronti di salita e di discesa, sono risultati tutti elementi indispensabili per formare un’idea quanto più chiara possibile di onda e di segnale. La derivata, pur con fatica, ha iniziato ad acquisire un “significato fisico” che va oltre l’applicazione della regola mnemonica.

Derivata onda a dente di sega con derivatore invertente



Anche l'onda a dente di sega presenta l'impulso in corrispondenza del fronte di discesa.

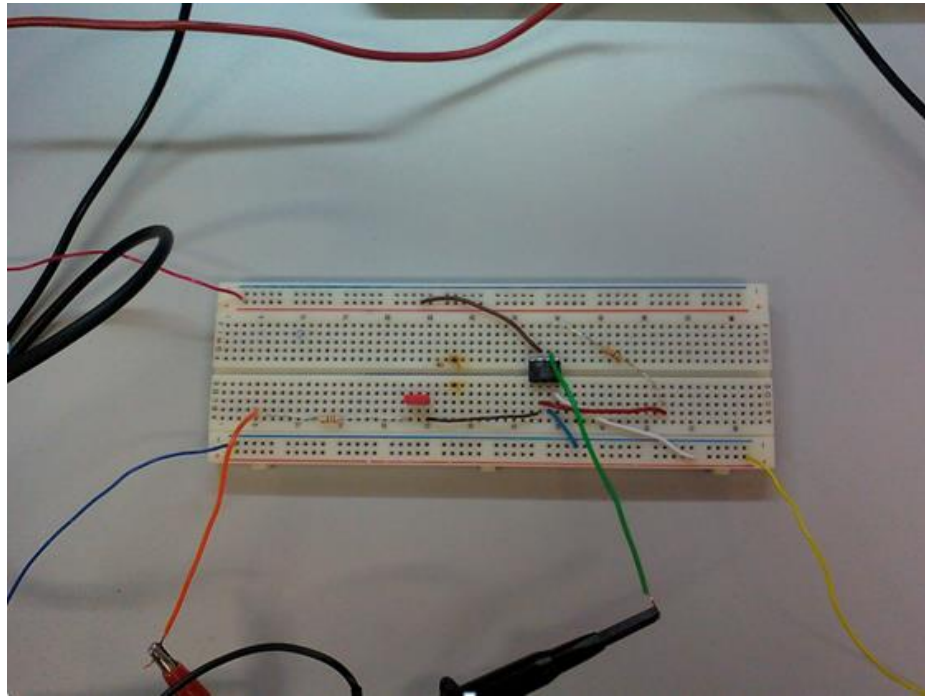
Derivata onda triangolare con derivatore invertente



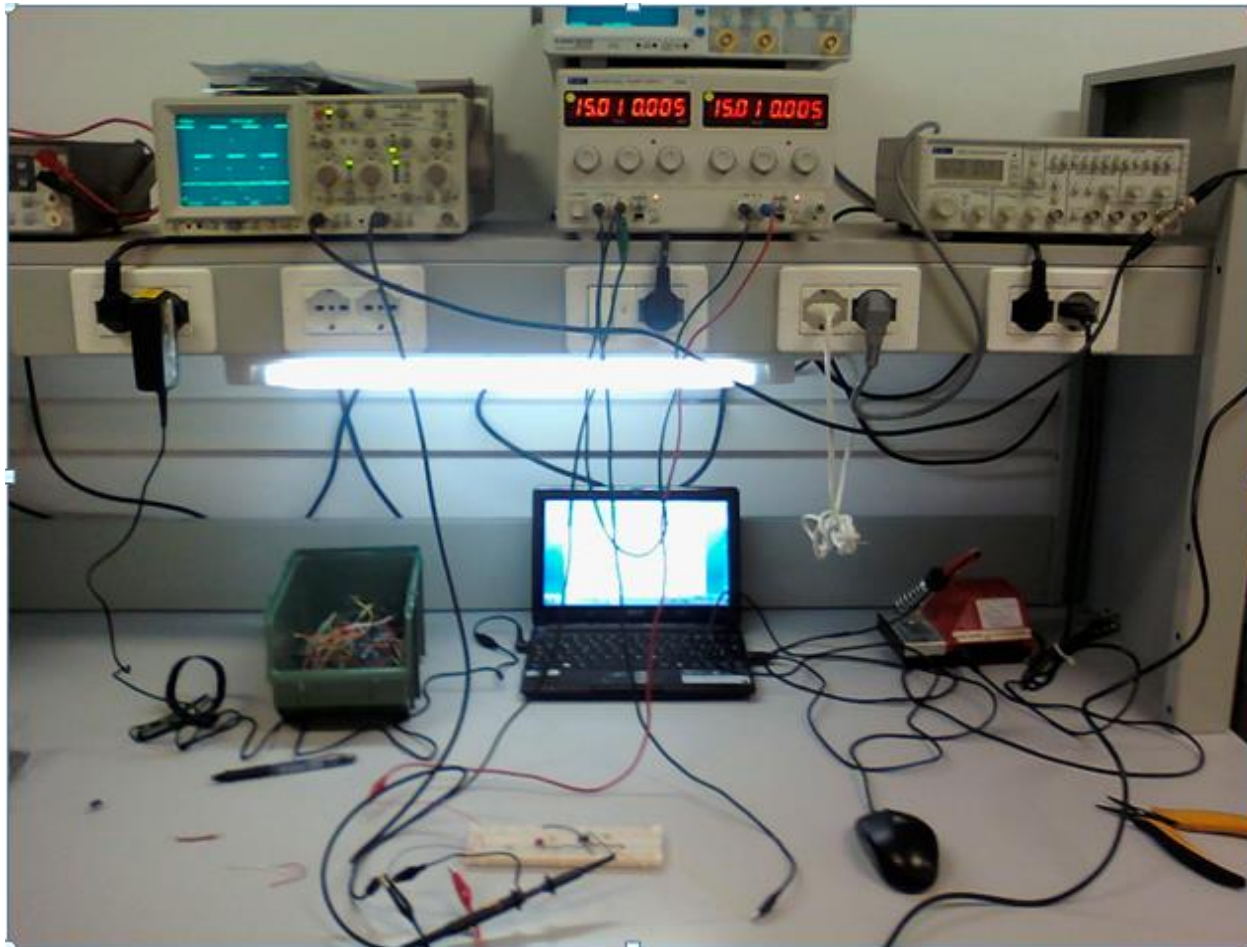
La derivata dell'onda triangolare mostra un tempo di salita o di discesa, in corrispondenza dei fronti di salita e di discesa, diverso da zero. Qui si nota facilmente il fenomeno dell'inversione prodotta dal derivatore: alla salita dell'onda triangolare corrisponde, nella derivata, un tratto costante negativo e viceversa.

L'attività nel laboratorio di elettronica

Il circuito realizzato dagli studenti

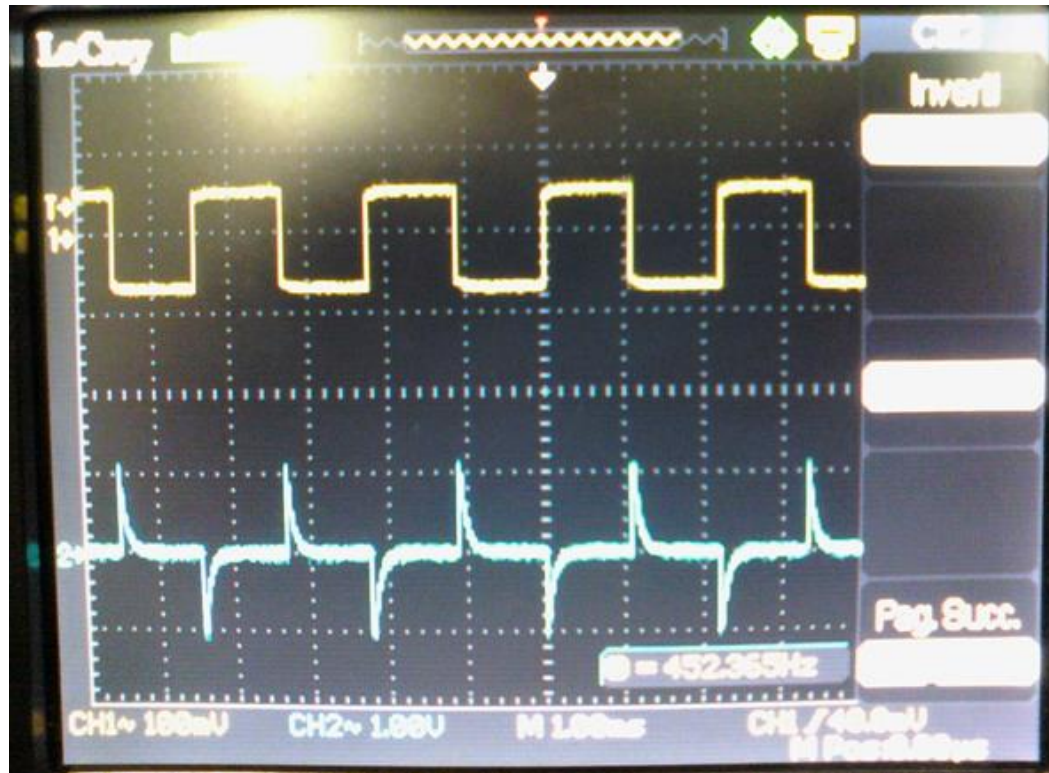


La postazione di lavoro e l'analisi del derivatore. In alto a sinistra si vede l'oscilloscopio, l'onda quadra e la sua derivata

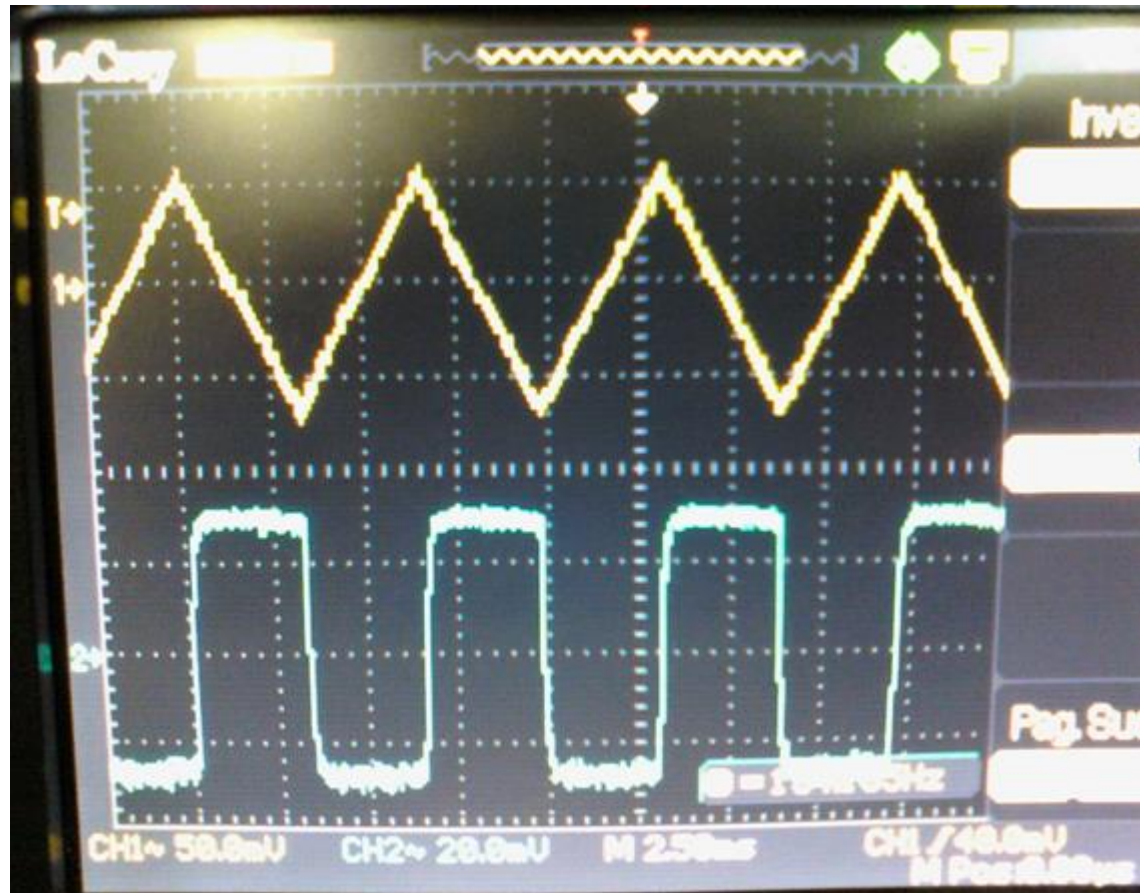


Alcune immagini dei segnali visualizzate
sul'oscilloscopio

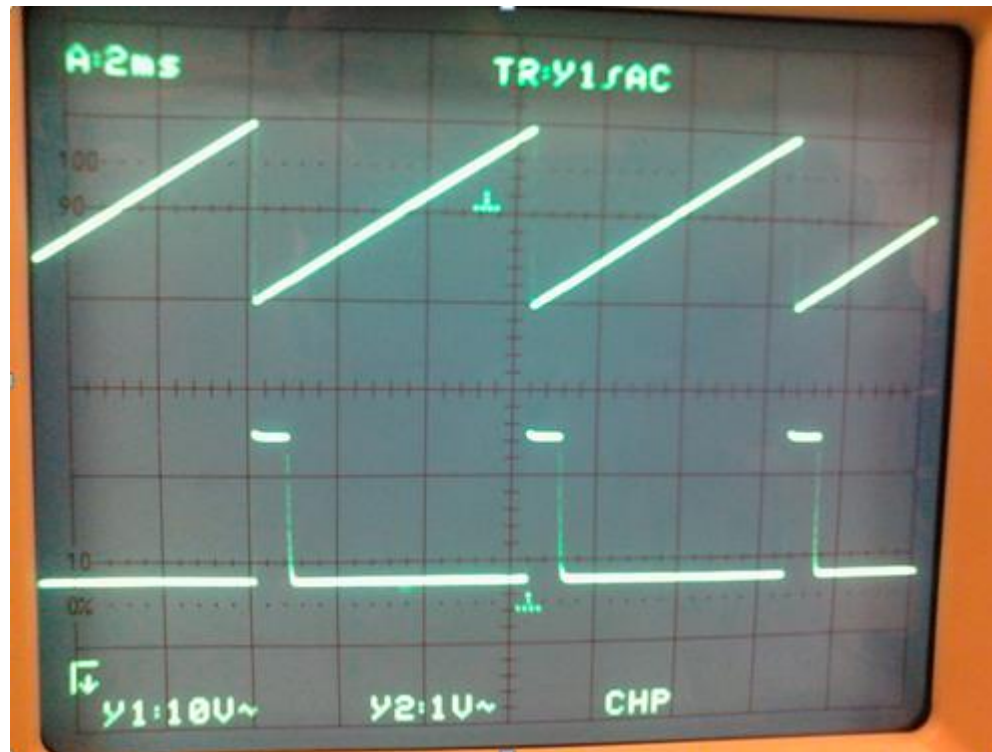
Onda quadra e sua derivata (invertita di segno)



Onda triangolare e sua derivata (invertita di segno)



Onda a dente di sega e sua derivata (invertita di segno)



Gli studenti

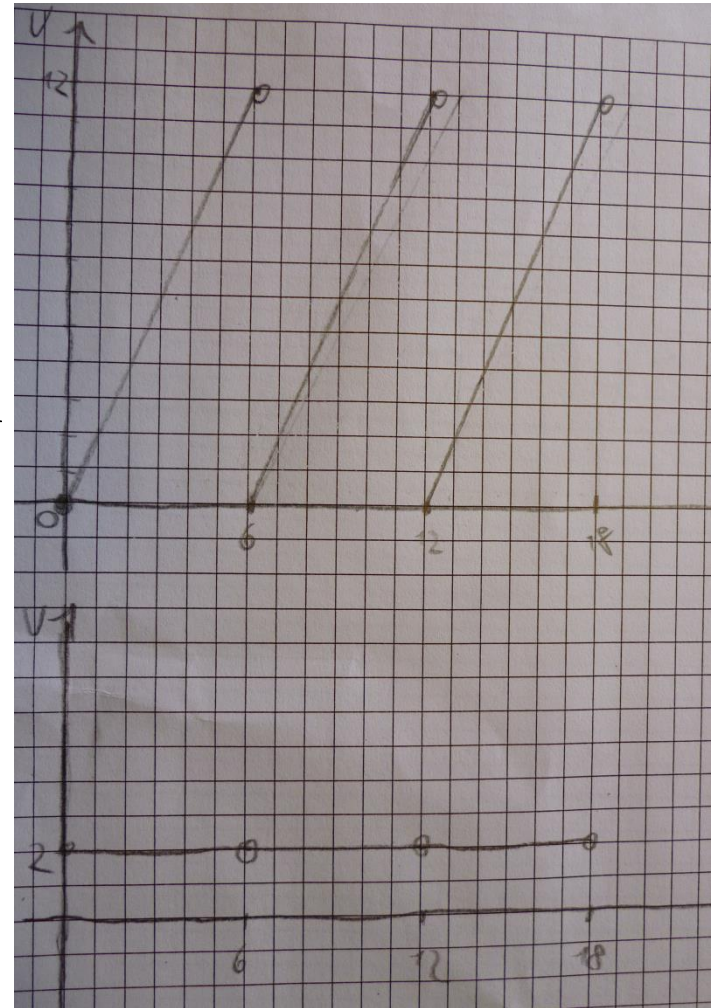
Tutta l'attività fin qui presentata è rivolta a costruire i concetti di onda, segnale e a fornire un significato fisico all'operazione di derivata. Oltre a questi aspetti fondamentali ce ne sono altri non meno importanti. Uno di questi è la capacità di saper “gestire” un oscilloscopio. Non è sufficiente un'occhiata fugace alle forme d'onda riportare sull'oscilloscopio per comprendere.

In una disciplina come l'elettronica, gli studenti sono portati a considerare funzionante un qualunque dispositivo da loro realizzato purché “succeda qualcosa”. Poco importa se “quel qualcosa” ha poco a che vedere con ciò che stiamo ricercando. Ad esempio, uno dei problemi che gli studenti devono affrontare è quello di determinare l'asse orizzontale sull'oscilloscopio.

Ogni forma d'onda visualizzata ha il suo asse orizzontale di riferimento, ma questo non è così ben visibile come su un grafico. Ecco allora la necessità di svolgere un'attenta e costante attività di sostegno con gli studenti, perché non sono pochi quelli che mostrano grande difficoltà a ricavare informazioni da ciò che vedono sullo schermo dell'oscilloscopio.

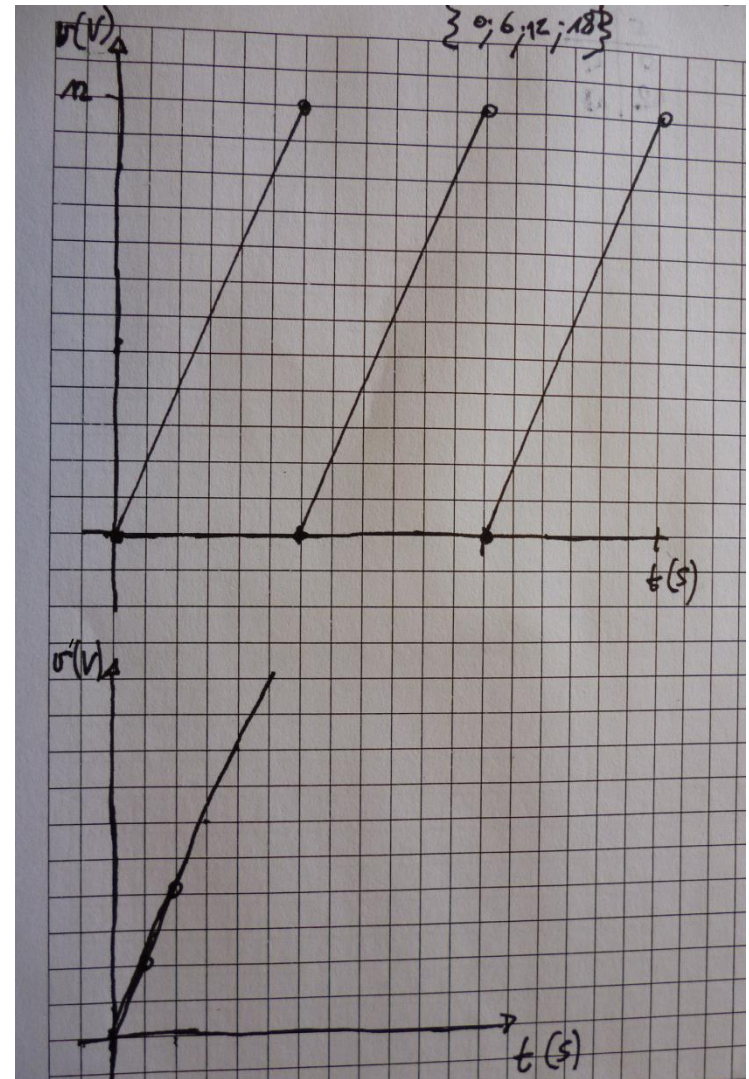
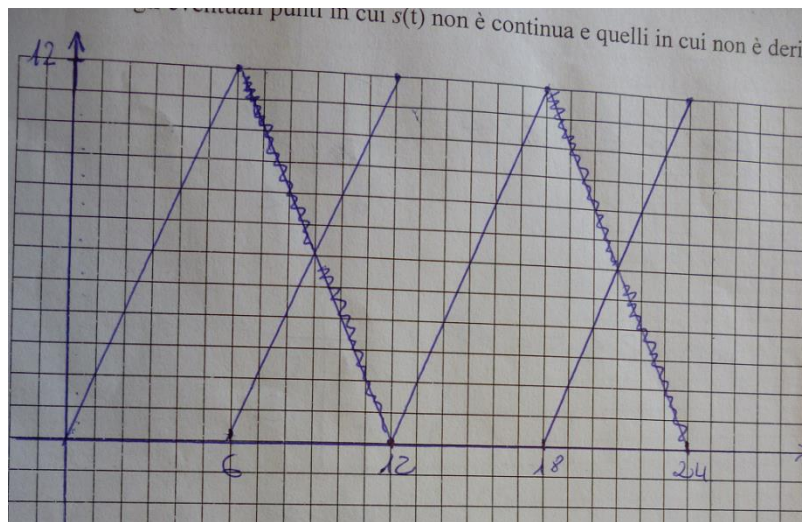
Dal quaderno degli studenti

Lo studente ha disegnato l'onda a dente di sega e la sua derivata. Ha posto sull'asse verticale la lettera v in entrambi i grafici, invece di v e v' , ma i grafici sono corretti.



A lato, è evidente la confusione fra onda, in alto, e derivata, in basso.

Nel grafico sotto lo studente ha fatto confusione fra onda triangolare e onda quadra.



Onda a dente di sega

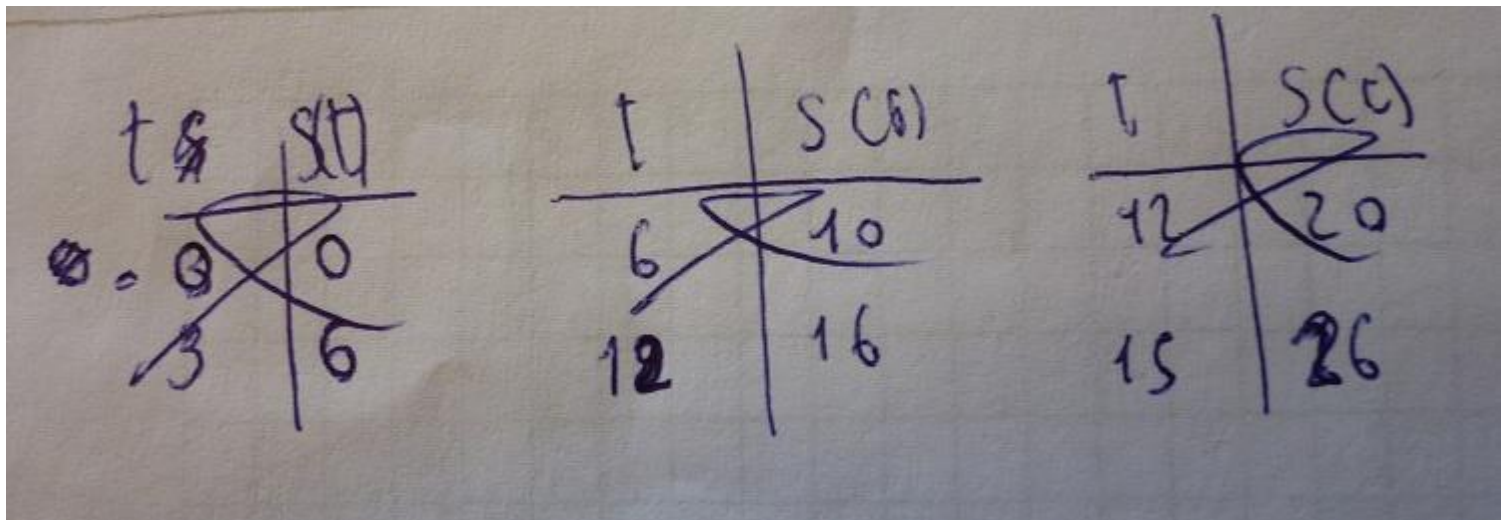
$$s(t) = 2(t - nT) \quad \text{per } nT \leq t < T + nT$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ e $T = 6\text{ms}$.

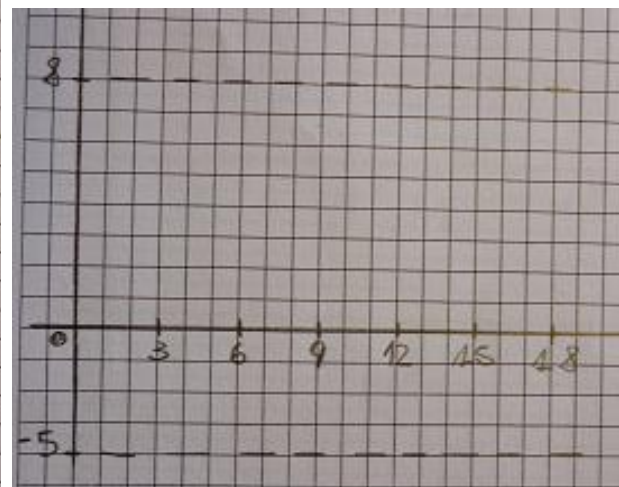
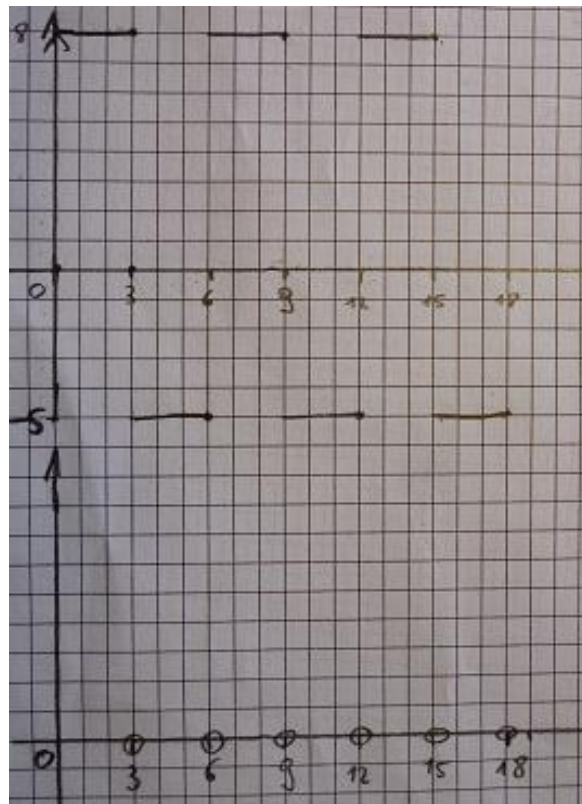
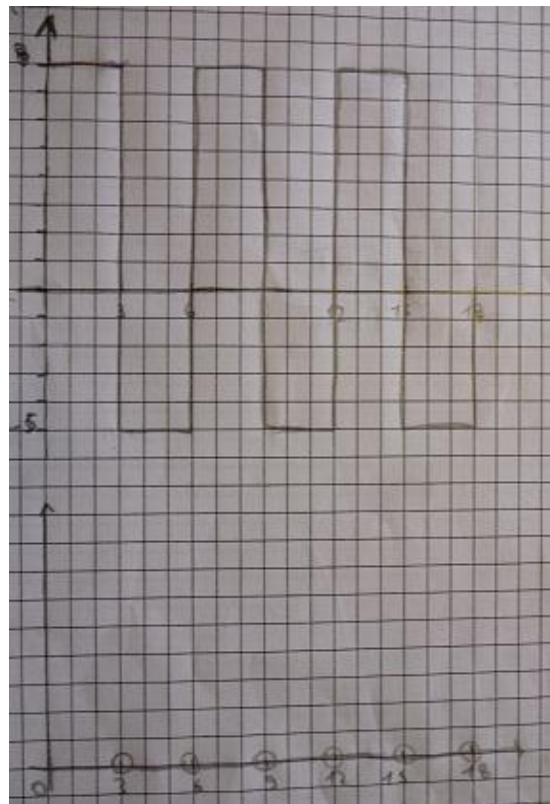
Lo studente confonde l'onda $s(t)$ con l'intervallo temporale (a fianco).

Nella foto sotto si vede che lo studente non riconosce il carattere periodico dell'onda e prosegue nei calcoli errati della $s(t)$. Cancella dopo che gli insegnanti gli fanno osservare l'errore.

$$\begin{aligned} n &= 0 \\ s(t) &:- \quad 0 \leq t < 6 \\ n &= 1 \\ s(t) &= \quad 6 \leq t < 12 \\ n &= 2 \\ s(t) &= \quad 12 \leq t < 18 \end{aligned}$$



Onda quadra disegnata con i tratti verticali a sinistra, come si fa in elettronica pensando al segnale fisico, e senza i tratti verticali al centro. A destra il disegno di uno studente che non ha ancora chiaro il concetto di onda quadra.



Per la derivata, in un primo momento, vengono indicati gli stessi intervalli dell'onda quadra, ad esempio:

$$nT \leq t < T/2 + nT$$

invece di:

$$nT < t < T/2 + nT$$

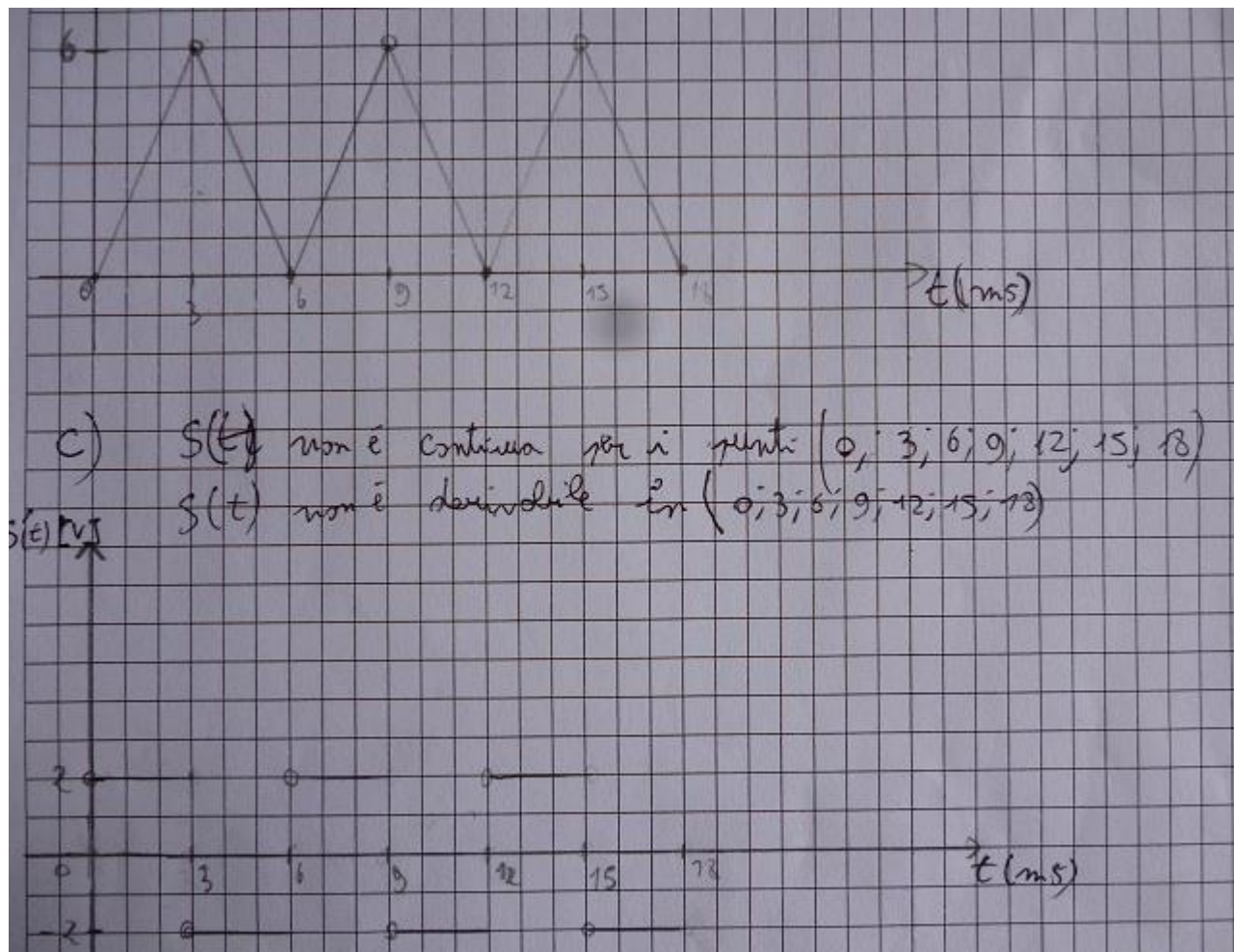
Lo studente poi si corregge cancellando l'uguale.

Data la funzione (onda quadra):

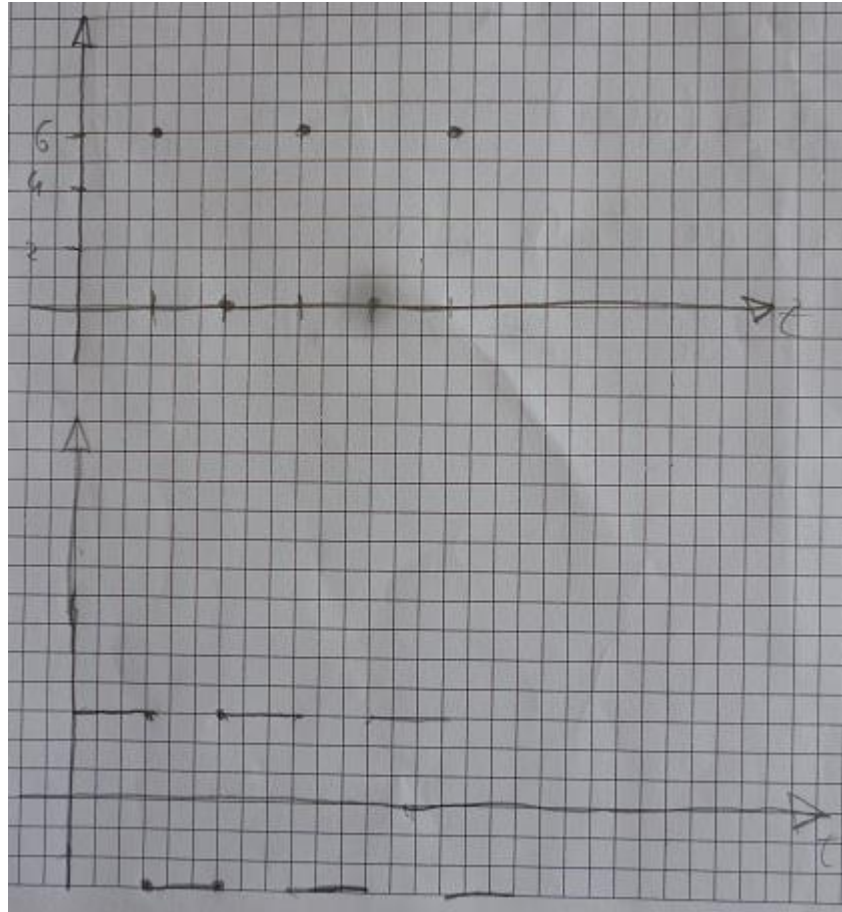
$$s(t) = \begin{cases} 8 \text{ V} & \text{per } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \\ -5 \text{ V} & \text{per } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \end{cases} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

a) $s'(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{per } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \\ 0 \text{ V} & \text{per } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \end{cases}$

Lo studente disegna l'onda triangolare, la sua derivata e indica i punti dove l'onda non è continua e non è derivabile.

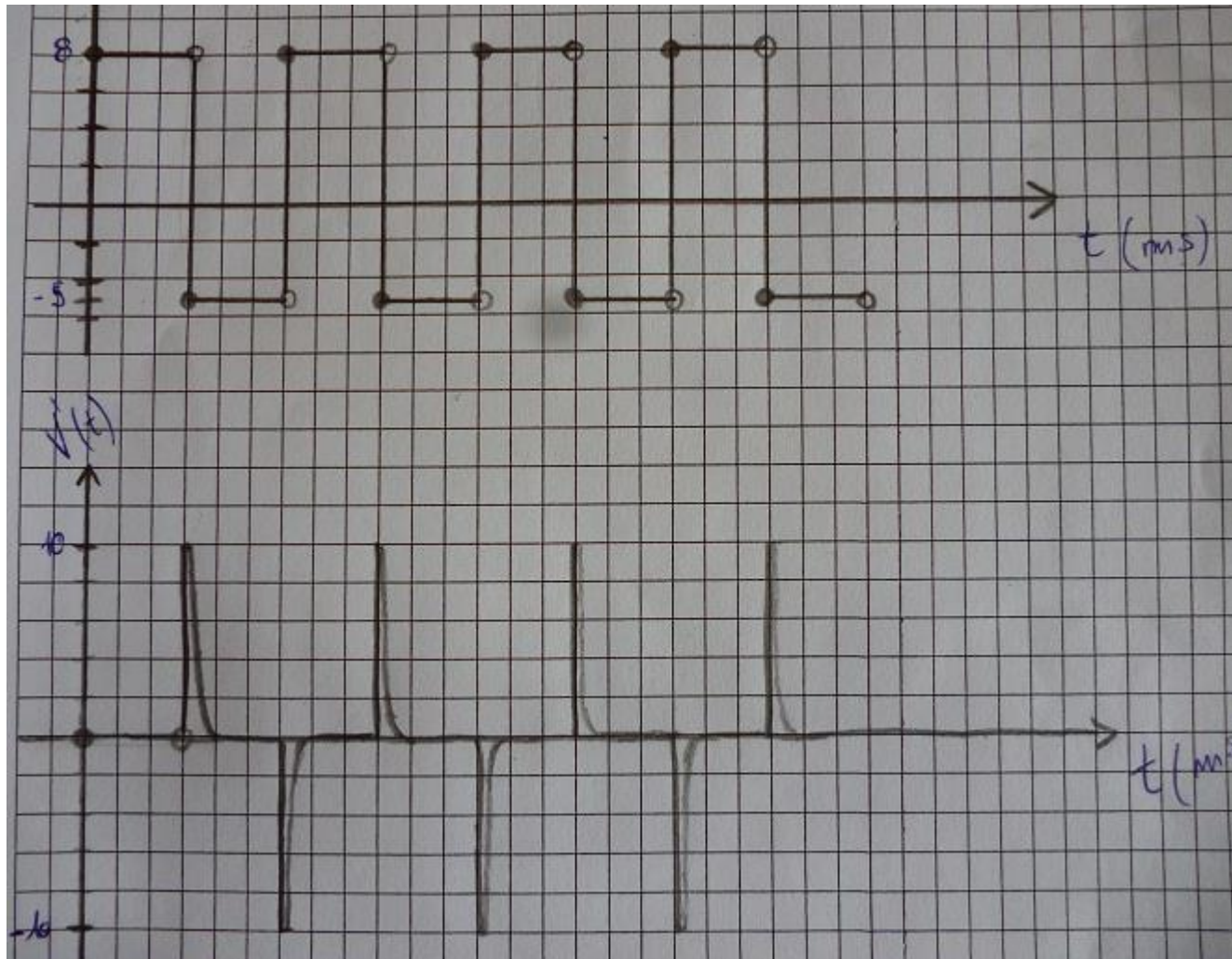


Lo studente, generalizzando quanto detto sul disegno dei fronti di salita e di discesa dell'onda quadra, decide di disegnare soltanto i vertici dell'onda triangolare, e non i lati che li uniscono.

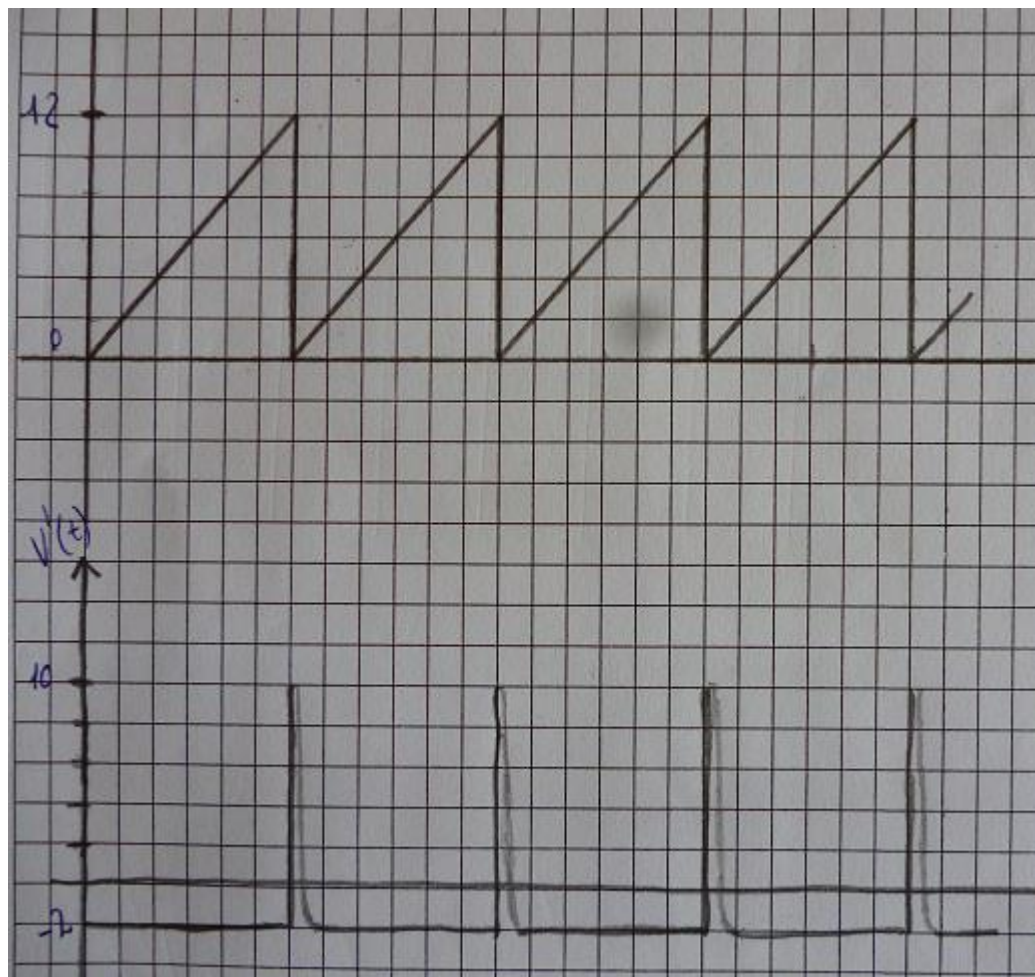


Rappresentazioni grafiche dei risultati ottenuti in laboratorio disegnate da uno studente

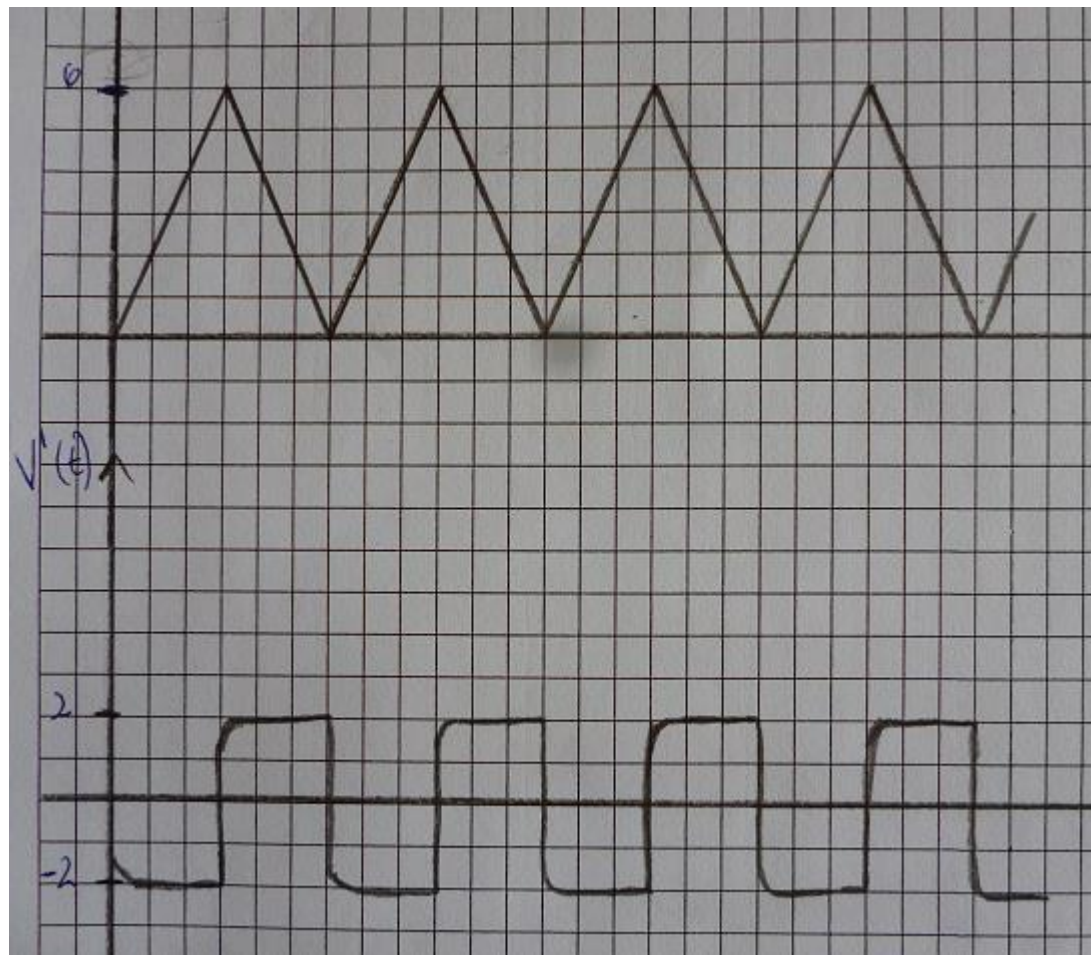
Onda quadra



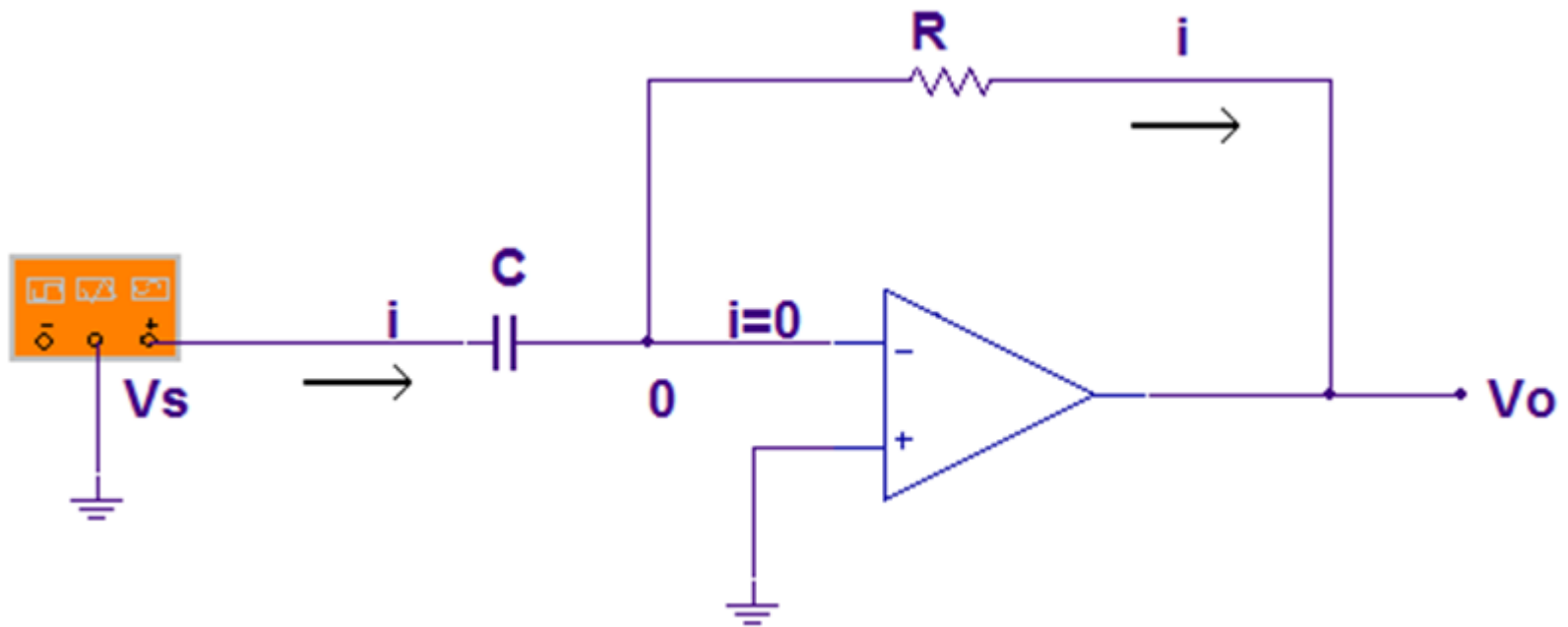
Onda a dente di sega



Onda triangolare



Perché il derivatore deriva



La differenza di potenziale sul condensatore è: $v_s - 0$

La carica sul condensatore è: $q = C \cdot (v_s - 0) = C \cdot v_s$

La differenza di potenziale sulla resistenza è: $0 - v_o$

Per la legge di Ohm: $(0 - v_o) = R \cdot i$

Quindi: $-v_o = R \cdot i$

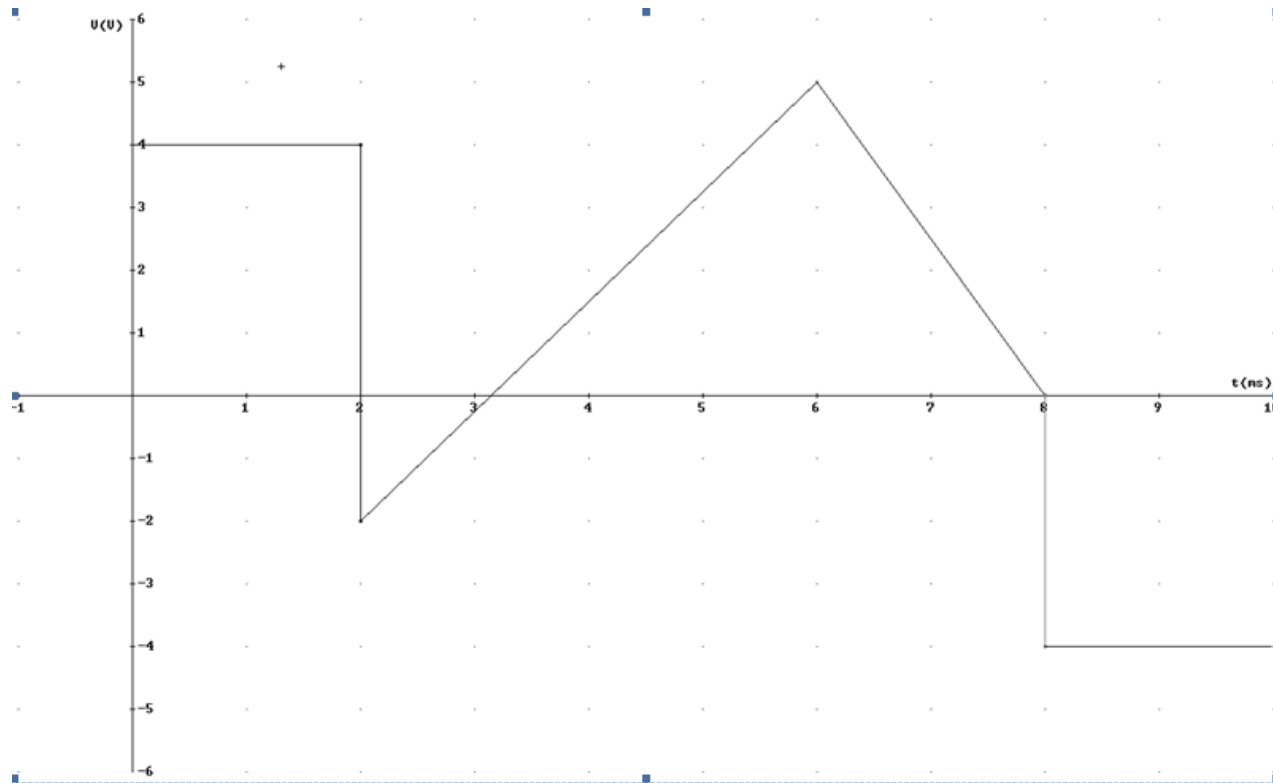
Inoltre: $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_s}{dt}$$

$$v_o = -RC \frac{dv_s}{dt}$$

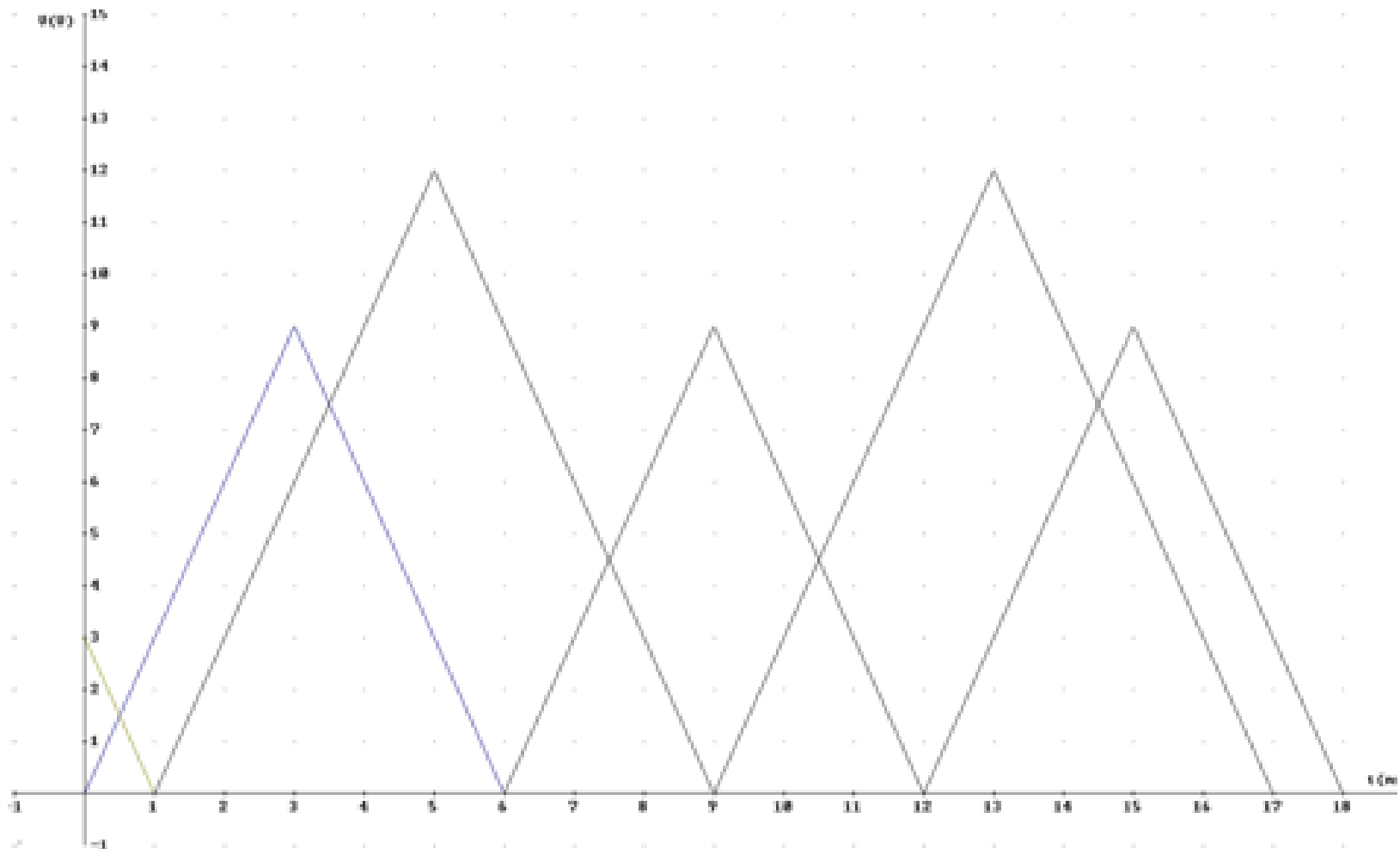
**Alcuni esempi di esercizi svolti
dagli studenti**

Disegna la derivata del seguente segnale:



Scrivi l'equazione del segnale rappresentato nel grafico e calcola la sua derivata. Disegna sia la derivata ideale sia quella reale in uscita dal derivatore a operazionale considerando in quest'ultimo caso $A_{dB}=0dB$.

Le onde triangolari rappresentate in figura hanno gli stessi coefficienti angolari ma diverse ampiezze.



- Disegna il grafico della derivata dei due segnali.
- Cosa puoi osservare sull'ampiezza della derivata dei due segnali?

Calcola la derivata della funzione

$$v(t)=4,5\text{sen}(\omega t) \text{ con } T=4\text{ms}$$

come si ottiene in uscita dal derivatore a
operazionale con $A_{\text{dB}}=-60\text{dB}$ e disegna i due
grafici (l'ampiezza del segnale è espressa in
volt).

Altri esercizi sono stati svolti in laboratorio sulle forme d'onda studiate con periodo e ampiezza forniti dai docenti.

Gli studenti devono impostare il segnale d'ingresso sul generatore di funzione, montare il derivatore, visualizzare il segnale d'uscita e riportare in grafico correttamente le due forme d'onda.

In conclusione

I quaderni da cui sono stati presi gli esempi mostrati appartengono a studenti di una classe quarta dell'anno scolastico 2013/14. Come si è potuto constatare da questi esempi, non sono pochi gli errori commessi, le rappresentazioni errate, le generalizzazioni inopportune: proprio nella correzione di questi errori sta l'efficacia del percorso. Il percorso è stato messo a regime nel curriculum scolastico delle classi quarta e quinta dell'istituto tecnico tecnologico per l'indirizzo elettronica.

Gli studenti hanno incontrato le onde e i segnali già dal terzo anno nei corsi di elettronica, sistemi automatici, e tecnologia disegno e progettazione. Anche in ambito matematico hanno lavorato sui grafici e sono state presentate le derivate prima di iniziare questo percorso, eppure non sono pochi gli studenti che hanno necessità, a nostro parere, di seguire un percorso di questo tipo per mettere in atto, operativamente, quanto hanno appreso, per correggere gli errori, smontare le tante misconcezioni e per rinforzare i concetti corretti.

Crediamo che la forza di questo percorso sia proprio nella forte trasversalità che si viene a creare fra matematica ed elettronica. La stessa presenza in classe, anche se limitata ad alcuni momenti, dei due docenti, è importante non solo per seguire meglio il lavoro operativo degli studenti, ma proprio per superare lo stereotipo della separazione in discipline dei saperi scolastici. Il fatto che gli studenti possano, in questo ambito, fare al docente di elettronica domande di matematica e a quello di matematica domande di elettronica rinforza l'unitarietà dei saperi.