Agnese De Rito, Rosemma Cairo, Egidia Fusani
Dell'associazione Matematica in Gioco

Poligoni stellati

I poligoni regolari che abbiamo incontrato finora sono tutti poligoni convessi; esistono anche dei particolari poligoni non convessi, anch'essi con una loro regolarità, lati e angoli uguali, , detti poligoni stellati.
Vediamo come ottenerli.
Usiamo dei geopiani di plastica o di legno con i chiodi inseriti nei vertici di poligoni regolari convessi, di diverso numero di lati.

Si collegano i poligoni convessi.
Bisogna ancorare un filo ad un chiodo. Se con il filo si collegano i chiodi in successione, si formerà il poligono convesso.

Si creano i poligoni stellati.
Prova invece, dopo aver fissato il filo ad un punto iniziale, a procedere con passo regolare, saltando sempre un chiodo, oppure saltandone due...... e collegando così con il filo un chiodo ogni due oppure ogni tre …

Prime osservazioni.
Come sono gli angoli di questi poligoni? Come potresti descrivere la loro costruzione?

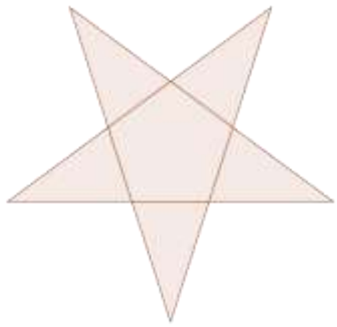
Domande.
Qualunque poligono regolare darà origine ad uno stellato ?
Si potranno ottenere stelle diverse da uno stesso poligono ?

Procediamo osservando i diversi poligoni sui geopiani.

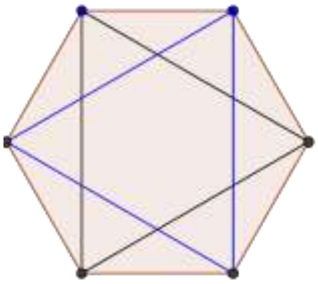
Dal **triangolo** si potrà ottenere un poligono stellato?
Dal **quadrato**?

Osserviamo meglio il pentagono, partiamo da un vertice che contrassegneremo come vertice n°5, fissiamo ad esso il filo e saltiamo un vertice. Il vertice 5 sarà così collegato al vertice 2, dal 2 si passerà al 4, al n° 1, al 3 e di nuovo al 5. Si ottiene così un poligono stellato che identificheremo con la scrittura **(5, 2),** dove **5 indica il numero dei vertici e due lo spostamento** per collegare i punti.

Proviamo a saltare due vertici, in successione il collegamento sarà: 5-3-1-4-2-5. Si ottiene la stessa stella, ma percorsa in senso inverso.
Lo si poteva prevedere?
Saltando tre vertici (collegamento 5, 4) ottengo il lato del poligono convesso.
Dunque dal pentagono regolare ottengo una sola stella, chiamata **pentagramma**.

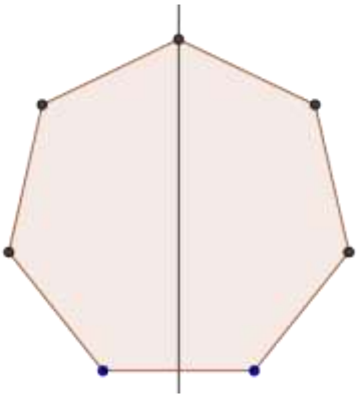


Passiamo all'**esagono**, prova saltando 1 punto (6, 2) e saltandone due (6, 3).
Occorre fare altre prove?
Qualcuno ha pensato di ottenere un poligono stellato partendo con un altro filo da un vertice libero.

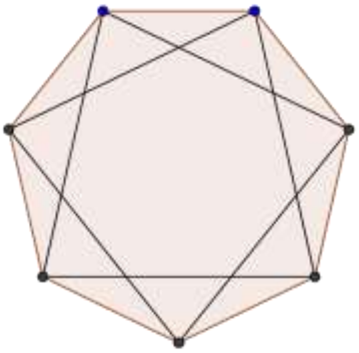


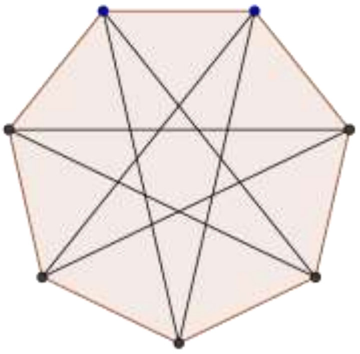
In realtà si considerano **poligoni regolari stellati quelli i cui lati costituiscono una sola linea spezzata chiusa**; in pratica **si possono ottenere con un tratto continuo fino alla chiusura della spezzata**; all'interno dell'esagono con la costruzione (6, 2) si è formato un triangolo, non un poligono stellato, e solo disegnando un altro triangolo ruotato si può ottenere un cosiddetto poligono stellato composto, si tratta però di una doppia costruzione con due linee spezzate diverse.

Riflessione sulla simmetria delle configurazioni.
Per capire quante stelle si potranno creare da un poligono di n vertici, basterà studiare il problema per metà figura:



Esaminiamo il caso dell'**ettagono**, si potranno ottenere due diverse stelle, (7, 2) e (7, 3)





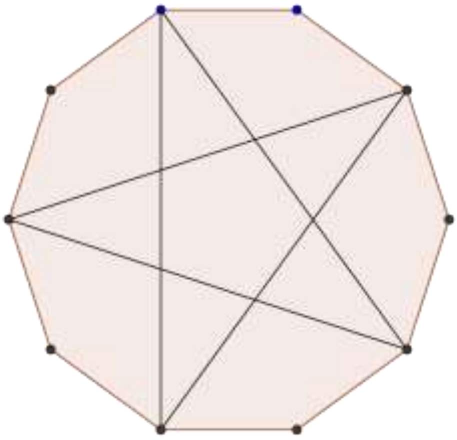
Notate un'altra caratteristica dei poligoni regolari stellati, **al loro interno** si riproduce **un poligono ad essi simile**.

Cerchiamo ancora sui geopiani con **ottagoni, ennagoni, decagoni e endecagoni** le stelle possibili.

Controlliamo la formazione di questi stellati

Poligono convesso regolare	Poligono stellato regolare
Triangolo	Non si forma
Quadrato	Non si forma
Pentagono	Una stella: (5, 2)
Esagono	Non si forma
Ettagono	Due stelle: ((7, 3) ; (7, 2)
Ottagono	Una stella: (8, 3)
Ennagono	Due stelle: (9, 2) ; (9, 4)
Decagono	Una stella: (10, 3)
endecagono	Quattro stelle: (11, 2) ; (11, 3) ; (11, 4) ; (11, 5)

Qualcuno, sul geopiano con il decagono avrà ottenuto una stella anche con la costruzione (10, 4), si sarà accorto però di aver ottenuto un tipo di stella già incontrata e avrà notato che questa stella, al contrario delle altre, non congiunge tutti i vertici del poligono di partenza.



Raccogliamo tutte le osservazioni sui poligoni ottenuti in una tabella.

SCHEDA 1

n (numero punti)	*k* (spostamento)	Numero giri	Poligono convesso	Poligono stellato	Numero punte/vertici	Dati identificativi del poligono
5	1					(5,1)
5	2					
6	1					
6	2					
7	1					
7	2					
7	3					
8	1					
8	2					
8	3					
9	1					
9	2					
9	3					
9	4					
10	1					
10	2					
10	3					
10	4					
11	1					
11	2					
11	3					

E' giunto il momento di chiederci**:**

In quali casi i poligoni non generano stelle?

Nei poligoni in cui si formano stelle, noto che succede con alcuni spostamenti e con altri no, quando si verificano questi casi?

Quando si generano poligoni stellati, tornando al punto di partenza dopo aver toccato tutti i vertici? Quando invece il poligono stellato non tocca tutti i vertici?

Rifletti sulle coppie di numeri che identificano il poligono (n, k).

Se il passo di costruzione k è divisore di n si può intuire che la linea spezzata tornerà sempre al punto di partenza senza incrociarsi e non si formerà un poligono stellato.

Se invece n e k sono primi tra loro, si potrà tornare al vertice iniziale solo con una spezzata intrecciata e si formerà una stella.

Si potrà formare invece una stella, che non passi per tutti i vertici del poligono convesso, come nel caso (10, 4), quando tra n e k c'è un divisore comune diverso da k.

Riflettiamo ancora, riconsiderando il primo stellato regolare trovato: il pentagramma (5 , 2).

La spezzata che lo forma è formata da 5 segmenti che si chiudono tornando sul vertice 5.

La successione dei vertici toccati era: 5 – 2 – 4 – 1 – 3 – 5

Se io numerassi gli stessi vertici non in modulo 5 ma in modo continuo (esempio: nell'orologio l'ora successiva alle 12 è l'una, 1.00, in modulo dodici, ma anche le 13 se leggiamo i numeri in ordine crescente), la successione dei vertici toccati diventerebbe: 5 - 2 - 4 – 6 – 8 – 10

Quindi il poligono (5 , 2) si è formato procedendo sui multipli di 2 e si chiude dopo aver collegato il vertice 10.

Che cos'è 10 rispetto a 5 e 2 ?

Il risultato dell'operazione 10:2 in questa situazione a che cosa corrisponde ?

Il risultato della divisione 10:5 in questa situazione corrisponderà …………

Controlliamo nella stella (7 , 3), scriviamo in nero la successione dei vertici toccati in modulo 7 ed in rosso la normale successione dei numeri in ordine crescente:

7 – 3 – 6 – 2 – 5 -1 -4 – 7

7 – 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 18 – 21

Per costruire questa stella abbiamo proceduto sui multipli di 3 ed essa si è chiusa sul 21

Analizza allo stesso modo la successione dei vertici delle altre stelle.

Potrai controllare che **i poligoni stellati si chiuderanno sul vertice che conteggiato in successione, corrisponderà al m.c.m. tra *n* e *k*.**

Se n e k sono primi tra loro, il loro m.c.m. è il loro prodotto.

Se n e k hanno un divisore comune $\neq 1$, essendo il loro m.c.m. minore del loro prodotto, si formerà una stella senza toccare tutti i vertici.

Se n è multiplo di k, n è il loro m.c.m. il poligono si chiuderà sul vertice di partenza senza formare la stella.

Posso determinare **quante stelle genera un poligono convesso di *n* lati**?

Dato che la condizione necessaria per formare stelle di n punte è che n e k siano primi tra loro (MCD =1), bisogna valutare , noto il numero n di vertici, quanti sono i possibili diversi valori di k coprimi con n e ricordare che, per motivi di simmetria, occorre controllarlo solo per i vertici di metà poligono.

Per esempio se considero un poligono di 16 lati, basta calcolare quanti coprimi di 16 sono compresi tra 2 e 8. Essi saranno il 3, il 5 e il 7, quindi formerà tre poligoni stellati che toccano tutti i 16 vertici.

Compila questa tabella, cercando di prevedere quali poligoni si formeranno collegando 20 vertici, con tutti i diversi spostamenti possibili.

SCHEDA 2

n (numero punti)	*k* (spostamento)	Numero giri	Poligono convesso	Poligono stellato	Numero punte/vertici	Dati identificativi del poligono
20	1					
20	2					
20	3					
20	4					
20	5					
20	6					
20	7					
20	8					
20	9					

CONCLUSIONI:

Con 20 punti e uno spostamento *k* è possibile disegnare:

1) UN POLIGONO CONVESSO se *k* è……………………………………………………..

2) UN POLIGONO STELLATO CON 20 PUNTE se *n* e *k* sono………………………………

3) UN POLIGONO STELLATO CON MENO DI 20 PUNTE se..…………………………….